

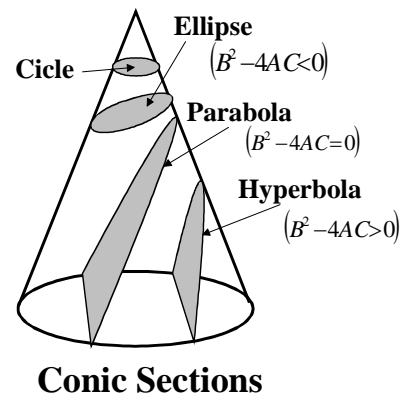
## 偏微分方程式と差分法 ( *Partial Differential Equations and Finite Difference Method* )

### 1. 2階の偏微分方程式の区分 (Clarification of partial differential equations with 2<sup>nd</sup> order)

#### 1.1 円錐曲線 (二次曲線) (Conical curve geometry and quadratic curve on the section of conical)

$$u = u(x, y) \quad (1)$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = G \quad (2)$$



)  $B^2 - 4AC < 0$ : 楕円 (円を含む) (Ellipse)

)  $B^2 - 4AC = 0$ : 放物線 (Parabola)

)  $B^2 - 4AC > 0$ : 双曲線 (Hyperbola)

#### 1.2 偏微分方程式の種類 ( *Partial Differential Equations* )

$$u = u(x, y), \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (4)$$

)  $B^2 - 4AC < 0$ : 楕円型方程式: 定常状態の現象 ( steady state )

$$\text{Laplace Eq. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ( u_{xx} + u_{yy} = 0 ) \quad (5)$$

$$\text{Poisson Eq. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad ( u_{xx} + u_{yy} = f ) \quad (6)$$

)  $B^2 - 4AC = 0$ : 放物型方程式: 熱流 (heat flux)、拡散 (diffusion)、圧密 (consolidation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ( u_t = \alpha^2 u_{xx} ) \quad (7)$$

)  $B^2 - 4AC > 0$ : 双曲型方程式: 振動 ( undulation, vibration )、波動 ( Wave propagation )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ( u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} ) \quad (8)$$

---

 2. 2階の偏微分方程式の差分化 (Finite difference equation of differential equations with 2<sup>nd</sup> order)

## 2.1 放物型(Parabola type): 熱伝導方程式 (thermal conduction) の差分化

Taylor's expansion of a temperature  $T(t, x)$  as function of time  $t$  and location  $x$ .

$$T(t, x + \Delta x) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4) \quad (9)$$

$$T(t, x - \Delta x) = T(t, x) - \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4) \quad (10)$$

By eq.(9) and eq.(10),

$$\text{From (9)-(10): } T_x = \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x} [T(x + \Delta x, t) - T(x - \Delta x, t)] \quad (11)$$

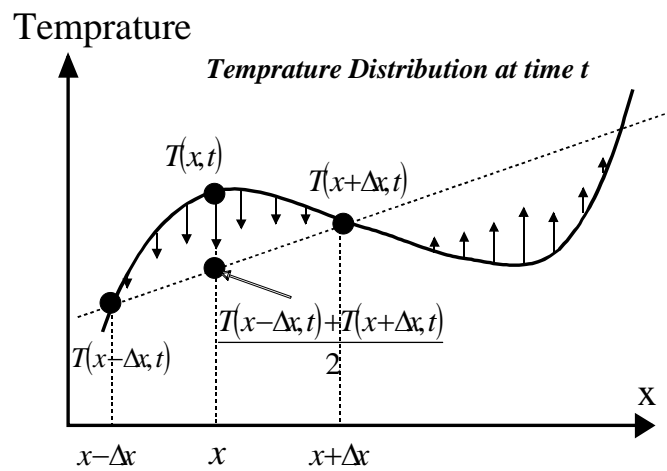
$$T_{xx} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} [T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)]$$

From (9)+(10):

$$= \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t)}{2} - T(x, t) \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t)}{2} - T(x, t) \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \propto \left[ \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t)}{2} - T(x, t) \right] \quad (13)$$



$T_{xx}$  means curvature of temperature distribution.

- $T(x, t)$  が近傍点の温度の平均より小さい、 $T_{xx} \geq 0$ :  $x$  から熱流量が流入(inflow)  
When  $T_x$  is lower then that around  $x$ ,  $T_{xx} > 0$  and heat flux flow in region  $x$ .
- $T(x, t)$  が近傍点の温度の平均に等しい、 $T_{xx} = 0$ :  $x$  へ熱流量なし(no flow)
- $T(x, t)$  が近傍点の温度の平均より大きい、 $T_{xx} \leq 0$ :  $x$  から熱流量が流出(outflow)

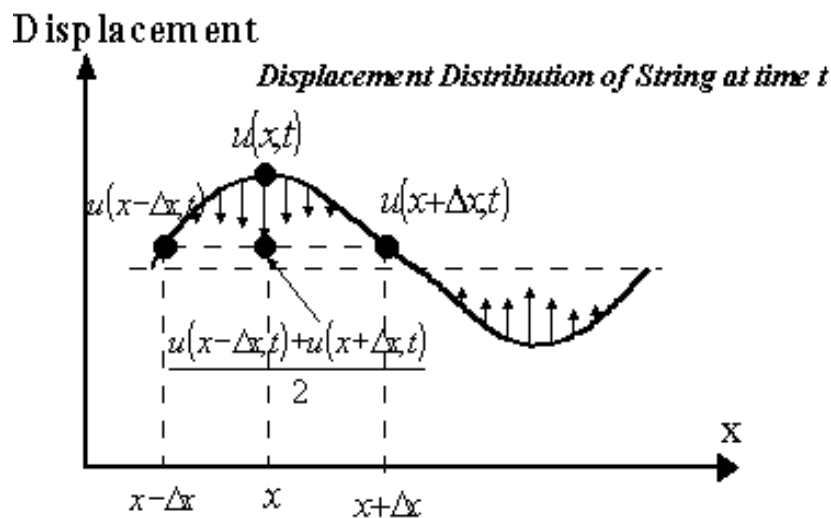
$x$  の熱変化速度  $\frac{\partial T}{\partial t}$  は近傍点の温度の平均とその点  $x$  との温度差に比例し、その増減は差の符号に従う。

- 温度  $T(x, t)$  が近傍点の温度の平均より小さければ、 $x$  の温度は上昇  
When  $T_x$  is lower then that around  $x$ , temperature  $T_x$  in region  $x$  increases.
- 温度  $T(x, t)$  が近傍点の温度の平均に等しいければ、 $x$  の温度変化なし
- 温度  $T(x, t)$  が近傍点の温度の平均より大きければ、 $x$  の温度は下降

2.2 双曲型放物型(hyperbola type): 波動方程式 ( Wave conduction ) の差分化

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{2\Delta x} [u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)] \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)] \\ &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right] \end{aligned} \tag{15}$$



- 変位  $u(x, t)$  が近傍点の変位の平均より小さければ、 $u_{xx} \geq 0$ : 上向き復元力
- 変位  $u(x, t)$  が近傍点の変位の平均に等しいければ、 $u_{xx} = 0$ : 復元力なし
- 変位  $u(x, t)$  が近傍点の変位の平均より大きければ、 $u_{xx} \leq 0$ : 下向き復元力

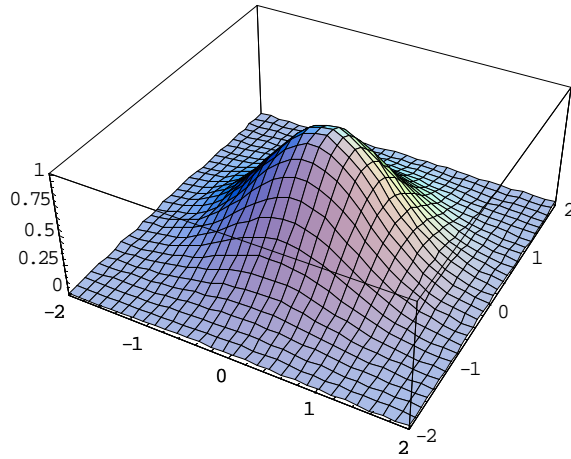
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right] \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \propto \left[ \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right] \tag{17}$$

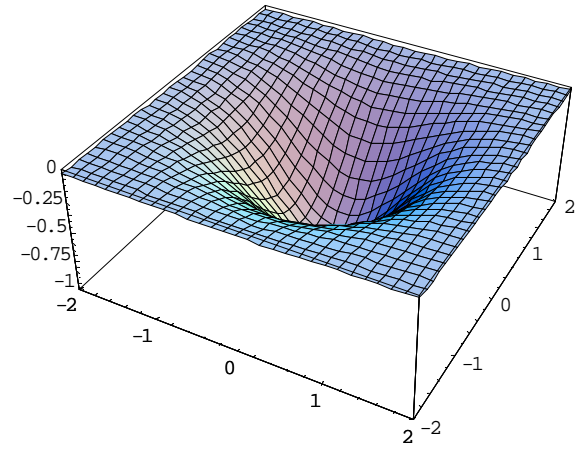
$x$  の加速度  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  は近傍点の変位の平均とその点  $x$  との変位との差に比例し、その加減は差の符号に従う。

- 変位  $u(x, t)$  が近傍点の変位の平均より小さければ、 $x$  は上向きの加速度  $u_{tt} \geq 0$  を得る ( 上向きの力を受ける )
- 変位  $u(x, t)$  が近傍点の変位の平均に等しければ、 $x$  の加速度  $u_{tt} = 0$  ( 力を受けない )
- 変位  $u(x, t)$  が近傍点の変位の平均より大きければ、 $x$  は下向きの加速度  $u_{tt} \leq 0$  を得る ( 下向きの力を受ける )

2次元での  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$



(a) 頂部では  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \leq 0$



(b) 底部では  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \geq 0$

### 2.3 楕円型(Elliptic type) の差分化

Laplace 方程式

$$\nabla^2 u = 0$$

Poisson 方程式

$$\nabla^2 u = f$$

$\nabla^2 u = -\rho$ : 静電場ポテンシャル

$\nabla^2 T = -g(x, y)$ : 定常状態温度分布 ( $g(x, y) > 0$  熱発生,  $g(x, y) < 0$  熱吸収)

Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0: \text{太鼓の膜の振動モード}$$